التاسعة من الملاحظة — الخميس 2015/12/10

2) $\lim_{n\to\infty} [n, +\infty[$

لدينا:

$[0,1[\subset [0,2[\subset \dots \subset [0,n[\subset \dots$

بالتالي متزايدة تماماً ويكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} [0,n[= \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} [0,n[\qquad E_n = [0,n[,\ n \geq 1$$

$$= [0, \infty[$$

وبالتالي فهي متقاربة.

بينما من أجل ② متناقصة تماماً لدينا:

$[1, \infty[\supset [2, \infty[\supset \dots$

فهي متقاربة ونهايتها:

$$\lim_{n\to\infty} [n, +\infty[= \bigcap_{n\geq 1}^{\infty} [n, \infty[$$

$$= \emptyset$$

ملاحظة:

نعلم من التبولوجيا أن تقاطع طبولوجيين هو من جديد تبولوجيا ومنه التعميم على أكثر من اثنين أما اتحادهما ليس من الضرورة أن يكون تبولوجيا.

من المعارف السابقة نتج أن تقاطع جبرين وكذلك جبرين تامين - صنفين مطردين كل منهما من جديد جبر تام - صنف مطرد وبالتالي يمكننا تعميم ذلك من أجل أسرة غير منتهية من الجبور (الجبور التامة) (الصنوف المطردة) يكون من جديد جبراً (جبراً تاماً) (صنف مطرد).

الإثبات: - سنقوم على هذا من أجل أسرة غير منتهية من الجبور التامة:

لتكن S_K صنف أو أسرة من الجبور التامة على X وليكن S هو تقاطعهم $S = \bigcap_K S_K$ ولنثبت أن هذا جبراً تاماً على X.

G_1) لأن $\emptyset, X \in$ كل من S_K، إذاً $\in S = \bigcap_K S_K$.

G_2) إذا اتمل $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ لكل من S_K تامة K اتحاد هم $\bigcup_n E_n \in$ ومنه الاتحاد المعدود غير المنتهي $\bigcup_n E_n \in S$.

$(G_3$ إذا كانت $E \in S_k$ مهما k فإن $\tilde{E} \in S_k$، وبالتالي إذا كانت $E \in \bigcap_k S_k$
فإن $\tilde{E} \in \bigcap_k S_k$ ($E \in S \Rightarrow \tilde{E} \in S$).

وهذا يثبت أن الصف S جبر تام على S.

وبالمثل: بنفس الطريقة من أجل الجبور - الصفوف المطردة.

ملاحظة:

أما بالنسبة للاتحاد بالنسبة لاثنين من كل منهما على الأقل فليس من الضرورة أن يكون جبراً - جبراً تاماً - صفاً مطرداً.

الجبر التام المولّد من صف غير خالٍ:

ليكن لدينا الصف $\emptyset \neq K \subseteq P(X)$. فثمة جبر تام واحد على الأقل على X يحوي K هو $P(X)$ على سبيل المثال. وأن تقاطع جميع الجبور التامة التي تحوي K هو جبر تام يحوي K. ومن ثم سيكون أصغر جبر تام على X يحوي الصف K. نسمي K هو الجبر التام المولّد بـ K أو الذي يولّده K.

ونرمز له بـ $S(K)$ ونكتب ذلك بالرموز:

$$S(K) = \bigcap_{K \subset S} S = \bigcap \{ S \; ; \; K \subset S \}.$$

حيث S جبر تام على X. أي أن $S(K)$ هو أصغر جبر تام على X يحوي K.

وبنفس الطريقة نحصل ذلك على الجبور والصفوف المطردة إذ نرمز بـ
$A(K) = \bigcap_{K \subset A} A$ للجبور و بـ $\mathcal{J}(K)$ للصف المطرد بالصف K.

نتيجة:

نفرض لدينا الصفان K_1 , K_2 من $P(X)$ إذا كان $K_1 \subseteq P(K_2)$ ينتج مباشرة أن $S(K_1) \subseteq S(K_2)$. أي أن الجبر التام المولّد بأحدهما $\subset$ بالجبر المولّد بالآخر.

مبرهنة: (متى يكون الجبر جبراً تاماً؟):

يكون الجبر جبراً تاماً إذا وفقط إذا كان A صفاً مطرداً. أي أنه شرط لازم وكافي.

الإثبات: من الكتاب يؤخذ على شكل تمرين ص 121.

مثال:

لنفرض أن $\tilde{E} \subset X$ و الصف $k = \{E\}$ عندئذ: يكون الجبر المولد بهذا الصف هو:

$$A(\{E\}) = \{\emptyset, E, \tilde{E}, X\}$$

في هذا المثال عرضنا الجبر الذي يتولد بمجموعة واحدة (أي أننا أسمينا) $A(\{E\}) = \{\emptyset, E, \tilde{E}, X\}$ الجبر المولد بالمجموعة E، وكذا يقال بالصف K ويمكن من أجل مجموعتين E، F:

$$A = (\{E, F\}) = \{\emptyset, X, \text{- - - - - -}\}$$

كل الصفوف الممكنة

لكن من الآن فصاعداً سيكون اهتمامنا في المجموعات الجزئية غير المنتهية من $\mathbb{R}$ والتي نستقرح منها جبراً تاماً على قدر كبير من الأهمية.

مثال:

اضرب مثالاً على صف مطرد على X علماً أن كل من $\emptyset$، $X \ni \mathcal{F}$ ولكنه لا يكون جبراً تاماً على X.

ملاحظة:

نسمي الصف الذي هو $P(X)$ مجموعة أجزاء المجموعة $X \neq \emptyset$ بالجبر القوي - الجبر التام القوي.

حل المثال:

الصف المقترح هو $\mathcal{F} = \{X, \tilde{E}, \emptyset\}$ حيث $E \subseteq X$، $\tilde{E}$

عندئذ يكون الصف $\mathcal{F}$ مطرداً بحسب التعريف لكنه ليس جبراً تاماً ولا جبر على X حيث غير مغلق بالنسبة لعملية الاتمام.

تعريف جبر بوريل:

تحدثنا فيما مضى أن X مجموعة كيفية ذات طبيعة ما أما هنا سنقترح $X = \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$

نسمي الجبر التام المولد بصف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ جبر بوريل على $\mathbb{R}$ ونرمز له بأحد الرمزين: $\beta(\mathbb{R})$ أو $\beta_{\mathbb{R}}$، أي إذا كانت F هو صف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ فيكون جبر بوريل عندئذ هو:

$$\beta(\mathbb{R}) = S(F).$$

وعناصر هذا الجبر تسمى بوريلية (هي مجموعات) من الملاحظة القادمة تبين أن هذا النوع من الجبور (بوريل) يمكن أنه يتولد من صفوف أخرى غير صف المجموعات المفتوحة.

ملاحظة (2) < توليد جبر بوريل > :

يمكننا توليد الجبر $\beta(\mathbb{R})$ بأحد الصفوف الثمانية التالية: (حيث $a,b \in \mathbb{R}$ ، $a<b$) :

$\beta_1 = \{(a,b)\}$

$\beta_2 = \{[a,b]\}$

⋮

$\beta_8 =$

الاثبات:

سنقوم بالإثبات أنه يتولد من الصف β_1 فقط هو المطلوب. (أما فقط الجبور مطلوب).

- طالما أن الفترة المفتوحة (a,b) هي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ فإنها مجموعة بوريلية ومنه يكون: $\beta_1 \subseteq \beta(\mathbb{R})$ وحسب نتيجة سابقة يكون لدينا:

$S(\beta_1) \subseteq \beta(\mathbb{R})$ ①

لنرمز الآن بـ F لصف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ عندئذ يمكن تصور المجموعة $E \in F$ بالشكل:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

ومنه نجد أن: $F \subseteq S(\beta_1)$ وبالتالي

$\beta(\mathbb{R}) = S(F) \subseteq S(\beta_1)$ ②

مما يتبين من ①، ② أن: $S(\beta_1) = \beta(\mathbb{R})$.

أمثلة:

1) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ حيث $a<b$ فإن كل فترة مما يلي تصوَّر بالشكل

•) $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$.

= ......

Scanned by CamScanner

عندها كيف نعبر عن الفترات التالية :

.) $[a, b)$
.) $[a, \infty)$

بنفس الطريقة السابقة .

مثال ②:
كل فترة (مفتوحة - مغلقة - نصف مفتوحة - نصف مغلقة) جميعها مجموعات بوريلية . كما وأن كل فترة غير محدودة في $\mathbb{R}$ مثل طرف مثلاً : $E = [a, \infty)$ وكذلك أصف المجموعات المفتوحة والمغلقة .

مثال ③ : $E = \{x\}$
المجموعة وحيدة العنصر والمعدودة المنتهية وغير المنتهية هي مجموعات بوريلية وعليه فإن : Q , $\bar{Q}$ مجموعات بوريلية .
وسنقوم بإثبات ذلك من أجل المعدودة .
لتكن : $E = \{y_1, y_2, \ldots\}$ مج معدودة غير منتهية عندئذٍ نستطيع تصور E على الصورة :

$$E = \{y_1\} \cup \{y_2\} \cup \ldots \cup \{y_n\} \cup \ldots$$
$$= \bigcup_{y \in Q} \{y\} \in \beta(\mathbb{R}) .$$

وبما أن أسرة المجموعات البوريلية هي جبر تام أي أنها مغلقة بالنسبة لعملية الاتحاد ويمكننا القول عندها أن E مج بوريلية . وهكذا بالنسبة لأية مجموعة منتهية مؤلفة من عنصرين أو أكثر و المجموعة وحيدة العنصر .

مفهوم القياس - القياس الخارجي وخواصهما :

① تعريف القياس : (أشمل أنه تعميم للمفاهيم : الطول - المساحة - ....)
لتكن لدينا المجموعة : $X \neq \emptyset$ (كالعادة) ، ولتكن S جبراً تاماً من X أو على $P(X)$. أحياناً نحتاج أن نتعامل مع مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ،
ومن المصطلح في نظرية القياس $0 (\pm \infty) = 0$ (هو عدم تعيين بالواقع)
ونستبعد فقط الإمكانية الحالية الموافقة لعدم التعيين $+\infty -\infty$.

$x>0$ أما الموجب $x \geq 0$

نعرف القياس غير السالب ~~[illegible]~~ على S (جبر تام) (يمكن أحياناً أن نعرفه على جبر) دالة مجموعات (مجموعاتية):

$$\mu : S \longrightarrow [0, \infty] \quad or \quad (-\infty, +\infty]$$
$$; E \longrightarrow \mu(E).$$

يحقق الخاصتين:

$m_1)$ $\mu(\emptyset) = 0$

وأيضاً $\mu(E) \geq 0$

$m_2)$ if $E_1, E_2, \ldots \in S$

فإن: $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$ متتالية منفصلة من عناصر S. فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad ①$$

أي أن μ: دالة جمعية تامة. (ليس مجموعية (قابلة للمكاملة)).

أو دالة σ-جمعية. أي تامة الجمعية.

*) تسمى الثلاثية (X, S, μ) فضاءً مقيساً مع قياس μ أو فضاء القياس μ اختصاراً. ولنذكر هنا أنه يمكننا تعريف أكثر من قياس على S (جبر تام). أي أن القياس المعرّف على S ليس وحيداً.

مثال:

إذا كان قياس أية مجموعة $= 0$ فإن هذا القياس يسمى القياس الصفري أي $0 = \mu(E)$: $\forall E$ مثلاً: $\mu(N) = 0$ وأيضاً

لو هنا القياسات: قياس العد الذي يهتم بعدد عناصر المجموعة أي: سنتعرف عليه لاحقاً.

$\mu(\{\#\}) = 1$, ← قياس ليبيغ

ملاحظة:

الخاصة الثانية من خواص القياس يُعبّر عنها بالشكل:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) \quad ②$$

بنفس الشرط ونقول عندئذ أن μ دالة جمعية انتهائية على S.

تعريف ② < القياس الخارجي >:

لتكن $X \neq \emptyset$ ؛ $P(X)$ مجموعة أجزائها والدالة μ^*:

$$\mu^*: P(X) \longrightarrow [0, \infty] \quad \text{or} \quad (-\infty, \infty]$$
$$E \longrightarrow \mu^*(E).$$

من الدالة المحققة لمايلي :

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$

2) if $E \subseteq F \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$; $E, F \in P(X)$

تسمى بخاصية الاطراد تزايد .

3) if $E = \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} E_n \Rightarrow \mu^*(E) = \mu^*\left(\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n\geq 1}^{\infty} \mu^*(E_n)$. ③

من أجل أي متتالية: $\{E_n\} \subseteq P(X)$ المتتاليات ليست بالضرورة منفصلة (مثنى مثنى)

نسمي هذه الخاصية نصف الجمعية المعدودة أو شبه الجمعية المعدودة ولهذا نقول أن μ^* دالة نصف جمعية معدودة على $P(X)$.

الدالة μ^* تسمى قياساً خارجياً على $P(X)$ أو على X اختصاراً .

مثال ①:

هذه المجموعة X هي نقاط حجر النرد أي $\emptyset \neq X = \{1, \dots, 6\}$

ولنعرف على $P(X)$ الدالة μ^* :

$$\mu^*(E) = \sqrt{|E|}$$

حيث $|E|$ عدد عناصر هذه المجموعة .

المطلوب: تحقق فيما اذا كانت الدالة μ^* قياساً خارجياً على $P(X)$ وهل يمكن أن تكون قياساً على $P(X)$ مع التعليل .

ملاحظة :

يمكننا التعبير عن ③ في تعريف القياس الخارجي من أجل n مجموعة أيضاً بالأحرى من أجل مجموعتين

•) $\mu^*\left(\bigcup_{k\geq 1}^{n} E_k\right) \leq \dots$

④

•) $\mu^*(E_1 \cup E_2) \leq \dots$